2010 m. fizikos olimpiados II turo uždavinių sprendimai
X klasė

1. Du automobiliai pradeda tolygiai greitėti iš vieno taško ta pačia kryptimi. Po laiko t_1 atstumas tarp jų lygus ℓ. Po kiek laiko t_2, nuo judėjimo pradžios, atstumas tarp jų bus lygus 3ℓ?

Sprendimas
1-as būdas
Iš sąlygos aišku, kad abiejų automobilių pagreičiai yra skirtingi. Tegul $a_1 > a_2$.
Per laiką t_1 pirmojo automobilio vidutinis greitis

$$v_{vid1} = \frac{\ell_1}{t_1} \qquad (1)$$

arba

$$v_{vid1} = \frac{v_1}{2}, \qquad (2)$$

čia v_1 – pirmojo automobilio greitis po laiko t_1. Iš (1) ir (2) lygčių randame $\ell_1 = \frac{v_1 t_1}{2}$.

Kadangi $a_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1}$, o $v_0 = 0$, tai

$$\ell_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}. \qquad (3)$$

Analogiškai antrajam automobiliui galime parašyti:

$$\ell_2 = \frac{a_2 t_1^2}{2}. \qquad (4)$$

Kadangi $\ell_1 - \ell_2 = \ell$, tai

$$\ell = (a_1 - a_2)\frac{t_1^2}{2}. \qquad (5)$$

Per laiką t_2 pirmasis automobilis nuvažiuos kelią

$$\ell_1' = \frac{a_1 t_2^2}{2}, \qquad (6)$$

o antrasis

$$\ell_2' = \frac{a_2 t_2^2}{2}. \qquad (7)$$

Pagal sąlygą $\ell_1' - \ell_2' = 3\ell$, todėl

$$3\ell = (a_1 - a_2)\frac{t_2^2}{2}. \qquad (8)$$

(8) lygtį padalinę iš (5), gauname $\boxed{t_2 = t_1\sqrt{3}}$.

2-as būdas
Iš sąlygos aišku, kad abiejų automobilių pagreičiai yra skirtingi. Tegul $a_1 > a_2$. Per ieškomą laiką t_2 atstumas tarp kūnų

$$3l = \frac{a_1 t_2^2}{2} - \frac{a_2 t_2^2}{2} = \frac{t_2^2}{2}(a_1 - a_2).$$

Per laiką t_1 atstumas tarp kūnų $l = \frac{t_1^2}{2}(a_1 - a_2)$.

Padalinę lygtis vieną iš kitos gauname $\frac{t_2^2}{t_1^2} = 3$. $\boxed{t_2 = t_1\sqrt{3}}$

2. Du vienodi kalorimetrai, kurių aukštis h = 75 cm, užpildyti 1/3 jų tūrio: vienas ledu, o kitas t_0 = 10 ^oC temperatūros vandeniu. Vanduo iš antrojo kalorimetro perpilamas į pirmąjį, šio kalorimetro užpildymas tampa lygus 2/3 indo tūrio. Po to, kai kalorimetre nusistovi temperatūra, jo užpildymo lygis padidėja Δh = 0,5 cm. Kokia buvo pradinė ledo temperatūra kalorimetre? Ledo tankis ρ_l = 900 kg·m^{-3}, vandens tankis ρ_v = 1000 kg·m^{-3}, savitoji ledo lydymosi šiluma λ = 3,4×10^5 J·kg^{-1}, savitoji ledo šiluma c_l = 2100 J·(kg·K)$^{-1}$, savitoji vandens šiluma c_v = 4200 J·(kg·K)$^{-1}$. Į kalorimetro šiluminę talpą ir šilumos nuostolius neatsižvelkite.

Sprendimas.

Kadangi nusistovėjus šiluminei pusiausvyrai indo užpildymas padidėjo, vanduo užšalo. Pažymėsime ieškoma temperatūrą t_x, o kalorimetro skerspjūvio plotą S. Jeigu būtų užšalęs visas įpiltas vanduo, jo aukštį h' rastume iš formulės $\rho_v \frac{h}{3} S = \rho_l h' S$, $h' = \frac{h}{3}\frac{\rho_v}{\rho_l}$. Indo užpildymo lygis padidėtų $\Delta h' = \frac{h}{3}\frac{\rho_v - \rho_l}{\rho_l} = 2{,}78 \text{ cm} > \Delta h$. Vadinasi, užšalo ne visas vanduo, ir kalorimetre nusistovėjo nulinė temperatūra.

Iš santykio $k = \Delta h / \Delta h' = 0{,}18$ matome, kad užšalo tik dalis vandens. Užšalusio vandens masę pažymėkime $\Delta m = k m_v$. Supiltas vanduo pašildė termostate buvusį ledą iki $t_1 = 0\ ^\circ\text{C}$ temperatūros, po to pats pradėjo kristalizuotis. Šiuos procesus aprašanti šiluminio balanso lygtis yra tokia:

$$m_v c_v (t_0 - t_1) + \lambda \Delta m = m_l c_l (t_1 - t_x).$$

Kadangi pradžioje vanduo ir ledas turi vienodus tūrius, $m_l = m_v \frac{\rho_l}{\rho_v}$. Įrašome į šilumos balanso lygtį ledo ir užšalusios vandens mases ir atsižvelgiame į tai, kad $t_1 = 0\ ^\circ\text{C}$.

$$m_v c_v t_0 + \lambda k m_v = -m_v \frac{\rho_l}{\rho_v} c_l t_x.$$

Ieškoma temperatūra

$$t_x = -\frac{\rho_v (c_v t_0 + \lambda k)}{\rho_l c_l}, \quad \boxed{t_x = -\frac{\rho_v \left(c_v t_0 + \lambda \frac{3\Delta h \rho_l}{h(\rho_v - \rho_l)} \right)}{\rho_l c_l}}, \text{ arba } \boxed{t_x = -\frac{h\rho_v c_v (\rho_v - \rho_l) t_0 + 3\lambda \Delta h \rho_v \rho_l}{h \rho_l c_l (\rho_v - \rho_l)}}.$$

$\boxed{t_x \approx -54{,}6\ ^\circ\text{C}}$

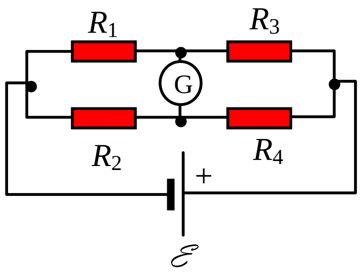
3. Koks srovės per galvanometrą G stipris šiais trimis atvejais:

a) $R_1 = R_2 = R, \quad R_3 = R_4 = 3R$;

b) $R_1 = R_3 = R, \quad R_2 = R_4 = 3R$;

c) $R_1 = R_4 = R, \quad R_2 = R_3 = 3R$.

Šaltinio elektrovara $\mathcal{E}$.



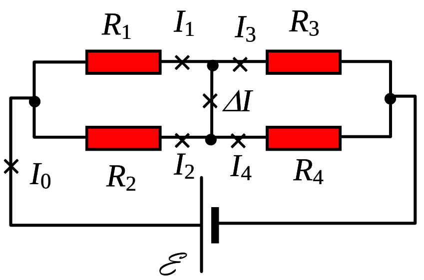
Sprendimas

a) Apskaičiuojame rezistorių R_1 ir R_2 įtampas:

$U_1 = \mathcal{E}\dfrac{R_1}{R_1 + R_3} = \dfrac{1}{4}\mathcal{E}$; $U_2 = \mathcal{E}\dfrac{R_2}{R_2 + R_4} = \dfrac{1}{4}\mathcal{E}$. Taigi, $U_1 = U_2$, todėl srovė per galvanometrą netekės, t.y. $I_g = 0$.

b) Vėl apskaičiuojame rezistorių R_1 ir R_2 įtampas:

$U_1 = \mathcal{E}\dfrac{R_1}{R_1 + R_3} = \dfrac{1}{2}\mathcal{E}$; $U_2 = \mathcal{E}\dfrac{R_2}{R_2 + R_4} = \dfrac{1}{2}\mathcal{E}$. Taigi, ir šiuo atveju $U_1 = U_2$, todėl srovė per galvanometrą netekės, t.y. $I_g = 0$.



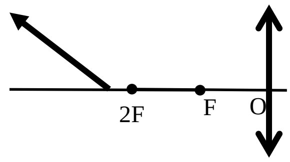
c) Pažymėkime srovių per atitinkamas varžas stiprius I_1, I_2, I_3 ir I_4, per galvanometrą ΔI, o visos grandinės I_0. Iš tiltelio pečių simetrijos aišku, kad $I_1 = I_4$, $I_2 = I_3$. Taigi, $I_g = \Delta I = I_1 - I_2$. Galime sudaryti lygčių sistemą:

$\begin{cases} \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \\ I_1 + I_2 = I_0 \end{cases}$ arba $\begin{cases} \dfrac{I_1}{I_2} = 3 \\ I_1 + I_2 = I_0 \end{cases}$. Iš čia surandame:

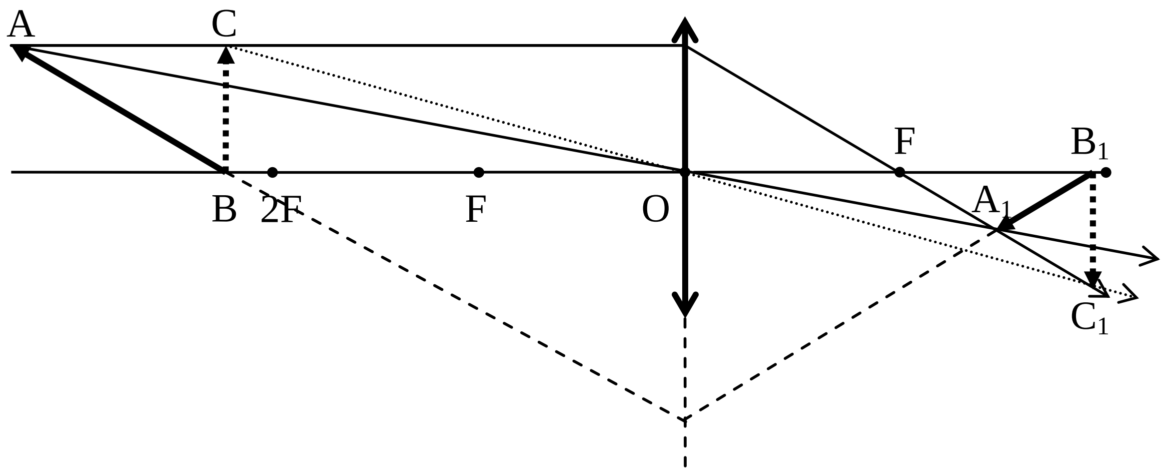
$I_1 = \dfrac{3}{4}I_0$, $I_2 = \dfrac{1}{4}I_0$.

Bet $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\mathcal{E}}{R}$. Taigi, $I_g = I_1 - I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$.

4. Paveiksle pavaizduoti glaudžiamasis lęšis ir daiktas, stipriai palinkęs lęšio optinės ašies atžvilgiu. Grafiškai raskite daikto atvaizdą. Glaudžiamąjį lęšį pakeiskite sklaidomuoju ir vėl nubrėžkite daikto atvaizdą. Perbraižydami paveikslą į sąsiuvinį, jį proporcingai padidinkite.



Sprendimas



Taško A atvaizdui rasti pasinaudokime dviems standartiniai spinduliais: vienu, einančiu per lęšio optinį centrą, ir kitu, einančiu lygiagrečiai optinei ašiai, o po lęšio – per jo židinį. Šių spindulių susikirtimo taškas A_1 ir yra taško A atvaizdas. Raško B atvaizdą surasti sunkiau. Nubraižykime papildomą daiktą BC, statmeną optinei ašiai. Lengvai rasime taško C atvaizdą C_1. Nuleidę iš jo statmenį į optinę ašį, rasime taško B atvaizdą B_1. Sujungę B_1 ir A_1, gauname daikto atvaizdą. Galima buvo pasinaudoti ir tuo, kad palikusio daikto ir jo atvaizdo tęsiniai susikerta lęšio plokštumoje.

Sklaidomojo lęšio atveju taško A atvaizdą randame kaip ir anksčiau, o taško B atvaizdą randame iš atvaizdų tęsinių susikirtimo taško D. Galima buvo vėl brėžti papildomą daiktą.